

Zadání písemné zkoušky z Matematiky 2 (VZOR)

FSV UK, LS 2016-17

1. Spočítejte supremum a infimum, případně maximum a minimum, funkce f na množině M , kde

$$f(x, y, z) = x^2 - yz,$$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1, z - y = 0\}.$$

(12 bodů)

2. Ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí daného bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci φ (proměnné x). Spočítejte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. Rozhodněte, zda je φ konvexní na jistém okolí bodu 0.

$$\arcsin(xy) = \sin(x + y)$$

(12 bodů)

3. Necht

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} x & x & 1 \\ x & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

V závislosti na parametru x určete hodnotu matice $\mathbb{A}$. Pro která x existuje matice inverzní k $\mathbb{A}$?

(12 bodů)

4. Vyšetřete konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$$

(12 bodů)

5. Spočítejte

$$\int \frac{-5 \cdot 8^x + 5 \cdot 4^{x+1} + 3 \cdot 2^{x+2}}{(4^{x-1} - 1)^2} dx.$$

(12 bodů)

Zadání písemné zkoušky z Matematiky 2

FSV UK, LS 2016-17

Termín číslo 1, 31. 5. 2017

1. Nalezněte maximum a minimum funkce f na množině M .

$$f(x, y) = x^2 - 2x + 4y + 6xy + y^2,$$
$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y \geq -1, x + y \leq 1, x - y \geq -1\}$$

(12 bodů)

2. Dokažte, že v jistém okolí bodu $[0, 1, \pi]$ je vztahem

$$\sin(xy) = \cos(z) + y^2$$

definována hladká funkce φ proměnných x, z . Spočtěte $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, \pi)$ a $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(0, \pi)$.

(12 bodů)

3. Necht

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vyřešte soustavu $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a spočtěte inverzní matici k $\mathbb{A}$.

(12 bodů)

4. Vyšetřete konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{n+5}$$

(12 bodů)

5. Spočtěte následující primitivní funkci na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$\int \frac{1}{(\cos^2 y) \cdot (\cos^2 y + \sin 2y + 1)} dy$$

(12 bodů)

Zadání písemné zkoušky z Matematiky 2

FSV UK, LS 2016-17

Termín číslo 2, 7. 6. 2017

1. Nalezněte maximum a minimum funkce f na množině M .

$$f(x, y, z) = \sin(xy) + \sin z$$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 - z = 0\}$$

(12 bodů)

2. Ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 1]$ implicitně zadanou funkci φ proměnné x . Spočítejte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. Rozhodněte, zda je φ konvexní na jistém okolí bodu 0.

$$\cos(xy) = \log(x + y) + 1$$

(12 bodů)

3. Necht

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vyřešte soustavu $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a spočítejte $\det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{A})$.

(12 bodů)

4. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{n+5}$$

(12 bodů)

5. Spočítejte primitivní funkci

$$\int \frac{2 \sin y - \cos y}{\cos^3 y + \sin y - \sin y \cos^2 y} dy$$

na intervalu $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

(12 bodů)

Zadání písemné zkoušky z Matematiky 2

FSV UK, LS 2016-17

Termín číslo 3, 14. 6. 2017

1. Nalezněte maximum a minimum funkce f na množině M .

$$f(x, y, z) = x + 3y + 2z$$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y + z = 2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

(12 bodů)

2. Ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí bodu $[-1, 0]$ implicitně zadanou funkci φ (proměnné x). Spočítejte první a druhou derivaci této funkce v bodě -1 . Rozhodněte, zda je φ monotónní na jistém okolí bodu -1 .

$$e^{x^2 y} = \operatorname{arctg}(xy) - x$$

(12 bodů)

3. Spočítejte $\det(\mathbb{A}\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^T)$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 6 & 3 \\ -5 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ -5 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(12 bodů)

4. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n + 5^n}.$$

(12 bodů)

5. Spočítejte primitivní funkci

$$\int \frac{x^2 + x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} dx.$$

(12 bodů)

Zadání písemné zkoušky z Matematiky 2

FSV UK, LS 2016-17

Termín číslo 4, 3. 7. 2017

1. Spočtěte supremum a infimum, případně maximum a minimum, funkce f na množině M , kde

$$f(x, y) = x^2 - y^2, \\ M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, y \geq x - \frac{1}{2}\}.$$

(12 bodů)

2. Ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí daného bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci φ (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. Rozhodněte, zda je φ monotónní na jistém okolí bodu 0.

$$\arcsin(xy + y) + \sin(x + xy) = 0$$

(12 bodů)

3. Zjistěte, pro která $a \in \mathbb{R}$ je $\mathbb{A}(a)$ regulární, a spočtěte $\det(\mathbb{A}(1))$, kde

$$\mathbb{A}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & a \\ -3 & 2 & 0 & 2 \\ a & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(12 bodů)

4. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^6 + 3n^5} - \sqrt[3]{n^6 + n^5}}.$$

(12 bodů)

5. Spočtěte

$$\int \frac{2x^3 - 2x^2 + 4x + 5}{(x-1)^2(x^2+2)} dx.$$

(12 bodů)

Zadání písemné zkoušky z Matematiky 2

FSV UK, LS 2016-17

Termín číslo 5, 1. 9. 2017

1. Spočítejte supremum a infimum, případně maximum a minimum, funkce f na množině M , kde

$$f(x, y, z) = x^2 - y - z,$$
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge y \leq 0\}.$$

(12 bodů)

2. Ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí daného bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci φ (proměnné x). Spočítejte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. Rozhodněte, zda je φ konvexní na jistém okolí bodu 0.

$$e^{x^2+y^2} + \log(1 + xy) - 1 + y = 0$$

(12 bodů)

3. Nalezněte všechna řešení soustav $\mathbb{A}x = b_1$ a $\mathbb{A}y = b_2$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(12 bodů)

4. Vyšetřete konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + 2}{(n+2)!}$$

(12 bodů)

5. Spočítejte

$$\int \frac{4x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2}{x(2x^2 + x + 1)} dx.$$

(12 bodů)